ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 307

1. В одном ящике 8 белых и 12 красных шаров, в другом ящике 10 белых, 5 черных и 5 красных шаров. Из первого переложили неизвестный шар во второй, а затем из второго достали два шара.

а) В какую теоретическую схему “укладывается" эта задача?

б) Записать соответствующую расчетную формулу и пояснить смысл входящих в нее величин.

в) Какие значения для данного условия принимают величины, входящие в указанную выше формулу?

г) Какова вероятность того, что оба шара красные.

Решение.

а) Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности.**

б) По условию из первого переложили неизвестный шар во второй, тогда возможны два случая: 1) переложили белый шар; 2) переложили красный шар. Применима формула полной вероятности $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$.

Событие А = «Из второго ящика достали два красных шара» (из г)).

Гипотезы: H_1= «Во второй ящик переложили из первого белый шар».

H_2= «Во второй ящик переложили из первого красный шар».

$P(A)$ - вероятность события А, $P(H_1)$, $P(H_2)$ - вероятности гипотез, $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ - условные вероятности события А, при условии что имели место гипотезы H_1, H_2.

в) Всего в первом ящике имеется 8+12=20 шаров, тогда вычислим вероятности гипотез $P(H_1)=\frac{8}{20}=0,4$, $P(H_2)=\frac{12}{20}=0,6$.

Вычислим условные вероятности события А.

Если имела место гипотеза H_1, то во втором ящике стало 10+1=11 белых, 5 черных и 5 красных шаров, всего 11+5+5=21, значит $P(A|H_1)=\frac{5}{21}$.

Если имела место гипотеза H_2, то во втором ящике стало 10 белых, 5 черных и 5+1=6 красных шаров, всего 10+5+6=21, значит $P(A|H_2)=\frac{6}{21}$.

г) Вычислим $P(A)=0,4\cdot\frac{5}{21}+0,6\cdot\frac{6}{21}=\frac{2+3,6}{21}\approx 0,2667$.

Ответ: а) формула полной вероятности,

б) $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$,

в) $P(H_1)=0,4$, $P(H_2)=0,6$, $P(A|H_1)=\frac{5}{21}$, $P(A|H_2)=\frac{6}{21}$,

г) $0,2667$.

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что

а) среди 10 новорожденных 5 мальчиков,

б) среди 100 новорожденных мальчиков от 45 до 55.

в) среди 1000 от 450 до 550.

г) Сравнить полученные результаты и прокомментировать.

Решение.

а) Имеем повторение испытаний. Вероятность появления события – рождение мальчика в каждом эксперименте постоянна и равна $p=0,5$. Тогда имеем схему Бернулли (это биномиальное распределение).

Формула Бернулли определяет вероятность появления ровно *m* раз события *A* в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p:*

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $p=0.51$ - вероятность рождения мальчика, $q=1-0.51=0,49$ - вероятность рождения девочки.

По условию $n=10$, $k=5$, тогда вычислим

$$P_{10}(5)=C_{10}^5 p^5 q^{10-5}=\frac{10!}{5!5!}\cdot 0.51^5 0.49^5=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 0.0345025\cdot 0.0282475=0.245602$$

б) Найдем вероятность того, что при $N=100$ количество мальчиков составить от 45 до 55.

Количество испытаний $N=100$ велико и применение формулы Бернулли в данном случае проблематично из-за сложных вычислений.

Вероятность того, что в N испытаниях событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз находится по формуле:

$P_N(k_1<k<k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$, где $\Phi(x)$- функция Лапласа, ее значения определяются с помощью таблицы.

$x'=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, тогда

$$x'=\frac{45-100\cdot 0,51}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\approx\frac{-6}{5}\approx -1,2, \quad x''=\frac{55-100\cdot 0,51}{\sqrt{100\cdot 0,51\cdot 0,49}}\approx\frac{4}{5}\approx 0,8.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная получим:

$$P_{100}(45\le k\le 55)=\Phi(0,8)-\Phi(-1,2)=\Phi(0,8)+\Phi(1,2)=0,2881+0,3849=0,673.$$

в) Найдем вероятность того, что при $N=1000$ количество мальчиков составить от 450 до 550.

Количество испытаний $N=1000$ велико и применение формулы Бернулли в данном случае проблематично из-за сложных вычислений.

Вероятность того, что в N испытаниях событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз находится по формуле:

$P_N(k_1<k<k_2)=\Phi(x'')-\Phi(x')$, где $\Phi(x)$- функция Лапласа, ее значения определяются с помощью таблицы.

$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, тогда

$$x'=\frac{450-1000\cdot 0,51}{\sqrt{1000\cdot 0,51\cdot 0,49}}\approx\frac{-60}{15,8082}\approx -3,7955,$$

$$x''=\frac{550-1000\cdot 0,51}{\sqrt{1000\cdot 0,51\cdot 0,49}}\approx\frac{40}{15,8082}\approx 2,5303.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная получим:

$$P_{1000}(450\le k\le 550)=\Phi(2,5303)-\Phi(-3,7955)=\Phi(2,5303)+\Phi(3,7955)=$$
$$=0,4943+0,4999=0,9942.$$

г) Если количество испытаний невелико, то следует применять теорему Бернулли, которая дает возможность точно рассчитать вероятность, если имеем большое количество испытаний, то следует применять приближенные формулы (локальная и интегральная теорема Лапласа и теорема Пуассона)

в п. а) вычислена вероятность что родилось ровно 5 мальчиков, среди 10 новорожденных,

в .п б) и в) приближенно вычислено, что количество мальчиков среди новорожденных составляет от 45 до 55 и от 450 до 550 соответственно от общего количества 100 и 1000.

На основании в) можно утверждать, что при практически достоверно, что среди 1000 новорожденных количество мальчиков будет находиться в пределах от 450 до 550.

Ответ: а) $P_{10}(5)=0.245602$,

б) $P_{100}(45\le k\le 55)=0,673$,

в) $P_{1000}(450\le k\le 550)=0,9942$.

г) Если количество испытаний невелико, то следует применять теорему Бернулли, которая дает возможность точно рассчитать вероятность, если имеем большое количество испытаний, то следует применять приближенные формулы (локальная и интегральная теорема Лапласа и теорема Пуассона).

На основании в) можно утверждать, что при практически достоверно, что среди 1000 новорожденных количество мальчиков будет находиться в пределах от 450 до 550.

3. СВ ξ равномерно распределена на отрезке $[-2,1]$. Найти плотность вероятности СВ $\eta=\sqrt{\xi+2}$. Построить график функции f_η.

Решение.

Запишем функцию плотности распределения для случайной величины ξ, равномерна распределенной на отрезке $[-2,1]$: $f_\xi(x)=¿\left\{\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}, x\in[-2,1], ¿¿¿\right.$.

Функция $\eta=\sqrt{\xi+2}$ монотонна на отрезке $[-2,1]$, она строго возрастает.

Применим формулу $g(\eta)=f(\phi(\eta))\cdot|\phi'(\eta)|$, где $\xi=\phi(\eta)$ - обратная функция к $\eta=|\xi|$.

Из $\eta=\sqrt{\xi+2}$ находим, что $\eta^2=\xi+2$, значит $\xi=\phi(\eta)=\eta^2-2$, тогда $\phi'(\eta)=2\eta$, откуда $g(\eta)=f(\phi(\eta))\cdot|\phi'(\eta)|=\frac{1}{3}\cdot|2\eta|$.

Определим, что при $\xi\in[-2,1]$ величина $\eta=\sqrt{\xi+2}$, $\eta\in[0,\sqrt{3}]$, тогда $g(\eta)=\frac{2}{3}\cdot\eta$

.

Обобщая полученные данные, найдем что $f_\eta(x)=¿\left\{\frac{2}{3}, x\in[0,\sqrt{3}], ¿¿¿\right.$

Построим график найденной функции.

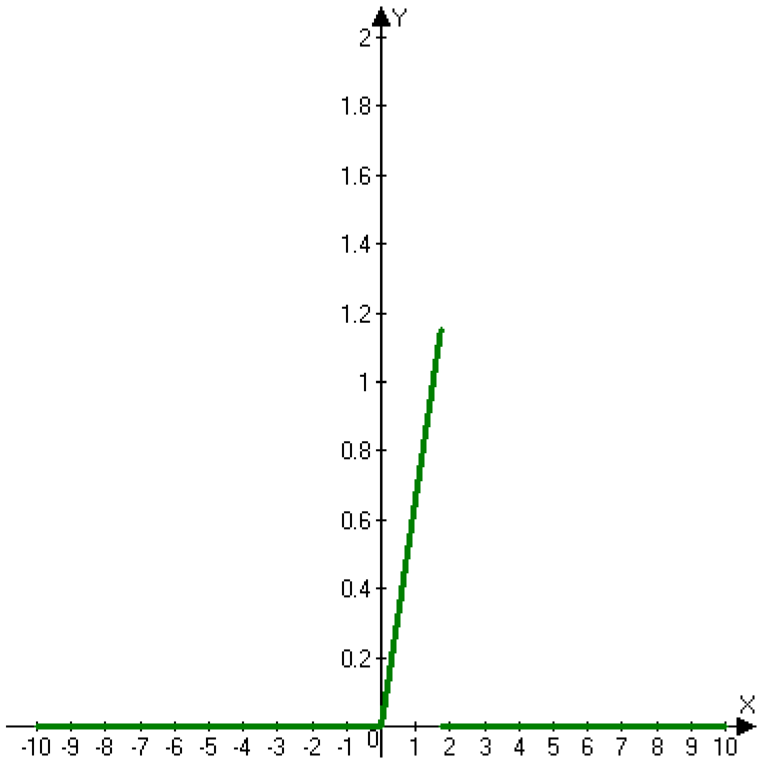

Рис.1.

Ответ: $f_\eta(x)=¿\left\{\frac{2}{3},x\in[0,\sqrt{3}],¿¿¿¿\right.$, рис.1.

4. Задана двумерная СВ $\{\xi,\eta\}$:

Таблица 1.

$\eta\backslash\xi$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/12
0	2/24	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Найти а) безусловные законы распределения и центр,

б) условный закон распределения η при $\xi=0$ и, в) условное матожидание,

г) распределение $\xi+\eta$

Решение.

Заданное распределение не является совместным законом распределения СВ $\{\xi,\eta\}$, поскольку сумма всех вероятностей равна

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{12}+\frac{2}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{3}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{6+4+28+4+4+3+6+4+3}{48}=\frac{62}{48}\neq 1,$$

заметим, что если вместо $\frac{7}{12}$ (при η=-1 и ξ=1) положить $\frac{7}{24}$, то получим

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{3}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{6+4+14+4+4+3+6+4+3}{48}=\frac{48}{48}=1.$$

Все дальнейшие расчеты будем производить для совместного распределения (иначе не получим ряды распределения) при $P(\xi=-1,\eta=-1)=\frac{7}{24}$

Таблица 2.

$\eta\backslash\xi$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
0	2/24	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Для того, что бы найти безусловный закон распределения ξ выполним сложение вероятностей по столбцам.

Таблица3.

ξ	-1	0	1
P_i	1/8+2/24+3/24=1/3	3/12=1/4	7/24+2/16=5/12

Для того, что бы найти безусловный распределения η выполним сложение вероятностей по строкам.

Таблица 4.

η	-1	0	1
P_i	1/8+1/12+7/24=1/2	2/24+1/12+1/16=11/48	3/24+1/12+1/16=13/48

Вычислим математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

$M\xi=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$,

$M\eta=-1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{11}{48}+1\cdot\frac{13}{48}=\frac{13-24}{48}=-\frac{11}{48}$.

Центр распределения: $\xi=\frac{1}{12}$, $\eta=-\frac{11}{48}$.

Б) найдем условный закон распределения η при $\xi=0$.

В таблице 3 найдено $P(\xi=0)=\frac{1}{4}$.

Условный закон распределения случайной величины η при условии, что $\xi=0$, найдем применяя формулу $P(\eta=\eta_i|\xi=0)=\frac{P(\eta=\eta_i,\xi=0)}{P(\xi=0)}$ тогда

$P(\eta=-1|\xi=0)=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, $P(\eta=0|\xi=0)=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, $P(\eta=1|\xi=0)=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

То есть

Таблица 5.

$\eta/\xi=0$	-1	0	1
P_i	1/3	1/3	1/3

В) Найдем условное математическое ожидание

$M(\eta|\xi=0)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

г) Найдем закон распределения СВ $\zeta=\xi+\eta$.

Вычислим все возможные суммы и запишем их вероятности

$\zeta_1=-1-1=-2$, $p_1=\frac{1}{8}$,

$\zeta_2=-1+0=-1$, $p_2=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$,

$\zeta_3=-1+1=0$, $p_3=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$,

$\zeta_4 = 0 - 1 = -1$, $p_4 = \frac{1}{12}$,

$\zeta_5 = 0 + 0 = 0$, $p_5 = \frac{1}{12}$,

$\zeta_6 = 0 + 1 = 1$, $p_6 = \frac{1}{12}$,

$\zeta_7 = 1 - 1 = 0$, $p_7 = \frac{7}{24}$,

$\zeta_8 = 1 + 0 = 1$, $p_8 = \frac{1}{16}$,

$\zeta_9 = 1 + 1 = 2$, $p_9 = \frac{1}{16}$,

Объединим одинаковые значения и вычислим $P(\zeta = -2) = \frac{1}{8}$,

$P(\zeta = -1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $P(\zeta = 0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} = \frac{3+2+7}{24} = \frac{1}{2}$,

$P(\zeta = 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{7}{48}$, $P(\zeta = 2) = \frac{1}{16}$

Таблица 6.

$\zeta = \xi + \eta$	-2	-1	0	1	2
P_i	1/8	1/6	1/2	1/2	1/16

Ответ: заданное распределение не является законом распределения, рассматриваем распределение из таблицы 2.

а) таблица3, таблица 4, центр $\xi = \frac{1}{12}$, $\eta = -\frac{11}{48}$.

б) таблица 5, в) $M(\eta | \xi = 0) = 0$, г) таблица 6.

5. Задан статистический ряд

Таблица 7.

x_i	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14
m_i	18	52	48	34	28

а) Построить гистограмму. Найти $\overline{x}_в$, моду, медиану и $D_в$.

б) Оценить доверительный интервал для $M[\xi]$ с надежностью $\alpha=0.05$

Решение.

а) Построим гистограмму частот заданного ряда распределения, отметив на оси абсцисс – интервалы распределения, а на оси ординат их частоты и построим прямоугольники.

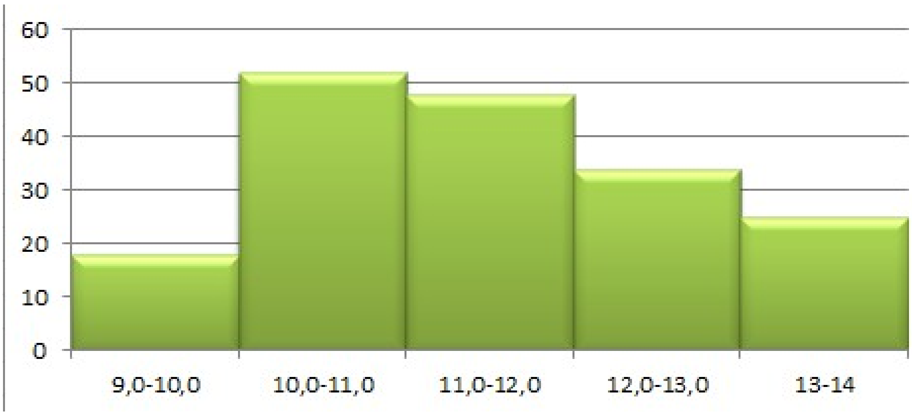

Рис.2.

Для вычисления числовых характеристик перейдем от интервального ряда к вариационному, взяв в качестве вариант середины интервалов.

Выборочный ряд распределения имеет вид.

Таблица 8.

x_i	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5
n_i	18	52	48	34	28

Объем выборки $n=\sum_i n_i=18+52+48+34+28=180$.

Выборочное среднее

$$\overline{x}_в=\frac{1}{n}\sum_i x_i n_i=\frac{9,5\cdot 18+10,5\cdot 52+11,5\cdot 48+12,5\cdot 34+13,5\cdot 28}{180}=\frac{2072}{180}=11,51.$$

Выборочная дисперсия $D_в=\overline{x^2}-\left(\overline{x}_в\right)^2=\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i-11,51^2=$

$$=\frac{9,5^2\cdot 18+10,5^2\cdot 52+11,5^2\cdot 48+12,5^2\cdot 34+13,5^2\cdot 28}{180}-132,5057=\frac{24121}{180}-132,5057=1,4999$$

Для дискретного ряда вычислим моду и медиану

Мода – это значение, которое встречается в выборке наиболее часто, тогда мода $M_0 = 10,5$.

Медиана – это значение варианты, которое делит ранжированный ряд на две равные по численности совокупности (в нашем случае – это полусумма вариант, которые находятся на 89 и 90 месте) , 18+52=70, 70+ +48=118, тогда $M_e = \frac{11,5 + 11,5}{2} = 11,5$.

Для интервального ряда вычислим моду и медиану.

В отличие от дискретных вариационных рядов определение моды и медианы по интервальным рядам требует проведения определенных расчетов на основе следующих формул:

$$M_0 = x_0 + i \cdot \frac{m_{M_0} - m_{M_{0-1}}}{\left(m_{M_0} - m_{M_{0-1}}\right) + \left(m_{M_0} - m_{M_{0+1}}\right)},$$

где x_0 – нижняя граница модального интервала (модальным называется интервал, имеющий наибольшую частоту); i – величина модального интервала; m_{M_0} – частота модального интервала; $m_{M_{0-1}}$ – частота интервала, предшествующего модальному; $m_{M_{0+1}}$ – частота интервала, следующего за модальным.

Тогда $x_0 = 10$, $i = 1$, $m_{M_0} = 52$, $m_{M_0 - 1} = 18$, $m_{M_0 + 1} = 48$.

$$M_0 = 10 + 1 \cdot \frac{52 - 18}{(52 - 18) + (52 - 48)} = 10 + \frac{34}{34 + 4} = 10.8947 .$$

$$M_e = x_0 + i \cdot \frac{\frac{1}{2}\sum f_i - S_{M_e - 1}}{f_{M_e}}$$

где x_0 – нижняя граница медианного интервала (медианным называется первый интервал, накопленная частота которого превышает половину общей суммы частот);

i – величина медианного интервала;

S_{M_e-1}– накопленная частота интервала, предшествующего медианному; f_{M_e}– частота медианного интервала.

$$M_e=11+1\cdot\frac{90-70}{48}=11.4167.$$

б) Доверительный интервал, покрывающий неизвестное математическое ожидание $M[\xi]=a$ с вероятностью γ имеет вид: $\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, где

$\bar{x}$ - среднее генеральной совокупности,

n - объем выборки,

$t_\gamma=t(n-1,\gamma)$- для различных значений n и γ приведено в специальных таблицах, связанных с распределением Стьюдента,

s - исправленное среднеквадратическое отклонение.

Для $n=180$- объем выборки, и $\gamma=1-\alpha=0.95$ находим $t(179,0.95)=1,97$, вычислим $s=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_в}=\sqrt{\frac{180\cdot1,4999}{179}}=1,2281$

тогда

$$11,5111-\frac{1,97\cdot1,2281}{\sqrt{180}}<a<11,5111+\frac{1,97\cdot1,2281}{\sqrt{180}}.$$

$$11,5111-0,1803<a<11,5111+0,1803.$$

$11,3308<a<11,6914$ или $11,3308<M[\xi]<11,6914$.

Ответ: рис.2., $\bar{x}_в=11,5111$, $D_в=1,4999$, для дискретного ряда $M_0=10,5$, $M_e=11,5$, для интервального ряда $M_0=10.8947$, $M_e=11.4167$,

б) $11,3308<M[\xi]<11,6914$.